Repaso Final

Funciones (Dominios)

En las funciones siguientes encuentra el dominio de f(x)

1) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$ 2)$f(x) = \ln(5 - x^2)$

Rectas (Problemas)

1) Supóngase que el valor de cierta maquinaria disminuye el 10% anual con respecto a su valor original. Si este es de \$8000, obtenga una ecuación que exprese el valor *v* de la maquinaria después de *t* años de haberse comprado, en donde $0 \leq t \leq 10$. Trace la ecuación, utilizando a *t* como el eje horizontal y a *b* como el vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? A este método se le denomina *depreciación en línea recta*.
2) Supón que una máquina se deprecia linealmente. Su valor hace 5 años era de \$200,000 y ahora vale \$110,000. Determina el valor de la máquina en términos del número de años transcurridos, así como el precio de la máquina para el próximo año

Parábolas (Problemas)

1) La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1000 - 2q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando existe una demanda semanal q por parte de los consumidores. Obtener el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y determinar dichos ingresos.($Ingreso\ = pq$)
2) Un comerciante renueva y vende llantas para automóviles. El costo de renovación de cada llanta es de 200 pesos que incluyen gastos fijos y variables. Actualmente el comerciante vende cada llanta en 300 pesos y a ese precio puede asegurarse la venta de 280 llantas al mes (en promedio). Él quiere mejorar sus ganancias y con este fin decide incrementar su precio unitario de venta. Por intuición, considera que por cada incremento de 20 pesos al precio de venta, el número de unidades vendidas disminuirá en 10. Halla una relación entre las utilidades y el precio de venta de cada llanta. ¿Qué precio debería fijar el comerciante a la venta unitaria para obtener una utilidad máxima?
3) Una compañía de autobuses está dispuesta a alquilar sus vehículos sólo a grupos de 35 o más personas. Si un grupo consta de 35 cada persona paga \$60. En grupos mayores, las tarifas de todas las personas se reduce en 50 centavos por cada persona adicional. Expresa los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo, elabore la gráfica y estime que tamaño del grupo maximizará los ingresos
4) Un minorista puede obtener cámaras del fabricante a US \$50 cada una y las vende a US \$80 cada una. A este precio, los consumidores han comprado 40 cámaras por mes. El minorista planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada US \$5 de reducción en el precio, cada mes se venderán 10 cámaras más. Exprese la utilidad mensual del minorista por la venta de las cámaras como una función del precio y encuentre el precio óptimo para maximizar la utilidad

Gráficas (traslaciones y cambios de escala) (potencia, radical, exponencial, logarítmica, trigonométrica)

1) A partir de la gráfica de $f(x) = e^x$ realiza la gráfica de$y = -f(x-1) + 2$ Determina dominio e imagen
2) A partir de la gráfica de $f(x) = \ln(x)$ realiza la gráfica de$y = f(x-2) + 1$ Determina dominio e imagen
3) A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ realiza la gráfica de$y = f(x-3) + 1$ Determina dominio e imagen
4) A partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ realiza la gráfica de$y = -f(x-1) + 2$ Determina dominio e imagen
5) A partir de la gráfica de $f(x) = tanx;\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ obtén la gráfica de $y = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$, determina su dominio y su imagen

Funciones seccionadas

Realiza la gráfica de las siguientes funciones

1) $f(x)=\begin{cases} 3x-2x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{5}{x+4} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad 0<x<2 \\ \sqrt{7+x} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

3) Cada mes, una compañía telefónica cobra una cuota fija de $375 además de las llamadas de larga distancia que se efectúan. El costo de la larga distancia nacional es de $0.50 por minuto si el tiempo es menor de 200 minutos y $1.00 por cada minuto adicional si el tiempo de larga distancia es mayor de 200 minutos. Escribe una expresión que proporcione la cantidad que pagará una persona al mes como función del tiempo de larga distancia que ocupa. ¿Cuál es el número máximo de minutos de larga distancia que puede acumular una persona que tiene un presupuesto de 650 pesos mensuales para el pago del teléfono?

Álgebra de funciones

1) Sean $f(x)=\frac{1}{16-x^2}$; $g(x)=\sqrt{8+x}$ encuentra $(f\cdot g)(x)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$; y su dominio
2) Sean $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$; $g(x)=\sqrt{10+x}$ encuentra $(f\cdot g)(x)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$; y su dominio

Composición de funciones

1) Sean $f(x) = \frac{1}{16-x^2}$; $g(x) = \sqrt{8+x}$ encuentra; $f\left(g(x)\right)$ y su dominio
2) Sean $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$; $g(x) = \sqrt{10+x}$ encuentra; $f\left(g(x)\right)$ y su dominio

Ecuaciones exponenciales, logarítmicas

1) La ecuación de demanda para cierto producto es $q = 80 - 2^p$. Despeje p y exprese la respuesta en términos de logaritmos comunes. Evalúe p a dos cifras decimales cuando $q = 60$.
   Resolver
2) $log_5(2x+1) - log_5(x-2) = 1$
3) $log\, x - log(2x+5) = log 3$
4) $2e^{-0.2t} - 4 = 6$
5) $\frac{50}{1+4e^{0.2t}} = 20$

Aplicaciones de exponenciales, logarítmicas, trigonométricas

1) La concentración de un medicamento en un órgano al instante t (en segundos) está dada por $x(t) = 0.08 + 0.12e^{-0.02t}$ donde $x(t)$ son gramos/ centímetros cúbicos (g/cm^3).
   a. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0.18 g/cm^3 la concentración de medicamento en el órgano?
   b. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0.16 g/cm^3 la concentración del medicamento en el órgano?
2) El Instituto Estenográfico Americano ha determinado que el estudiante promedio del curso Taquigrafía Avanzada, curso intensivo de 20 semanas, progresa de acuerdo con la función $Q(t) = 120(1-e^{-0.05t}) + 60 \quad (0 \le t \le 20)$ donde $Q(t)$ mide el número de palabras (por minuto) del dictado que el estudiante puede escribir en taquigrafía después de t semanas en el curso. Grafique la función Q y responda lo siguiente.
   a. ¿Cuál es la velocidad inicial de escritura en taquigrafía para el estudiante promedio de este curso?
   b. ¿Cuál es la velocidad que alcanza el estudiante promedio a la mitad del curso?
   c. ¿Cuántas palabras por minuto puede escribir en taquigrafía el estudiante promedio al terminar el curso?
3) **Difusión de un Rumor.** 300 estudiantes asistieron a la ceremonia de inauguración de un nuevo edificio en el campus de su universidad. El presidente de la escuela (que tradicionalmente era sólo para mujeres) anunció un programa de ampliación, con planes para que la escuela fuese mixta (para hombres y mujeres). El número de estudiantes que supieron del nuevo programa t horas después está dado por la función $f(t) = \frac{3000}{1+Be^{-kt}}$.
   Si 600 estudiantes del campus han escuchado acerca del nuevo programa dos horas después de la ceremonia, ¿cuántos estudiantes habrán oído de esta política después de cuatro horas?
4) La Fábrica de ropa de invierno London ha observado que las ventas mensuales de la empresa en los últimos años muestran una tendencia sinusoidal. Los dueños de la fábrica han observado que las ventas suben a 10000 el primero de enero y disminuyen a 3000 el primero de julio. Determina una expresión para las ventas de la Fábrica durante el año y después grafícala.

Función inversa

1) Encuentra $f^{-1}(x)$ de $f(x) = \frac{1-3x}{4-2x}$ y determina el dominio e imagen de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$
2) Encuentra $f^{-1}(x)$ de $f(x) = \frac{3^x+2}{5+3^x}$

Límites

1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{4x^3+5x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-x-2}$ 5) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^3+27}}$

Dada la Grafica obtener lo que se pide

1. Dada la gráfica de $g(x)$ responder a las preguntas siguientes:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ __________ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ _________

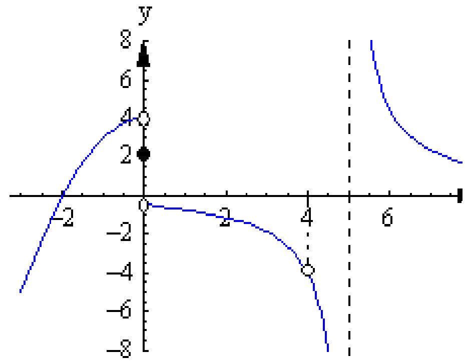
   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ ________ d) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ _________

   e) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ _________ f) $g(0)$ _____________

   g) $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x)$ _________ h) $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x)$ __________

   i) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ _________ j) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$ __________

   k) $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$ ________ l) $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ __________



   Ecuación de sus asíntotas horizontales__________

   Ecuación de sus asíntotas verticales ______________

   Puntos de discontinuidad y clasificación (justifica)

Determine si la función es continua en el valor de a, si no lo es clasifique el punto de discontinuidad

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{18}{x^2} & if\ x \le -3 \\ 4 + x & > -3 \end{cases}$ $a = -3$ 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+x}{x} & if\ x \neq 0 \\ 2 & if\ x = 0 \end{cases}$ $a = 0$ 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3+x} & if\ x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & if\ x \ge -3 \end{cases}$ $a = -3$

Gráficas de funciones racionales Para cada función encuentra: a) Dominio b) Intersecciones con el eje x y el eje y ; c) Puntos de discontinuidad y clasificación (justificando su respuesta calculando los límites) d) Asíntotas horizontales y verticales e) Bosquejo gráfico de la función

1) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$; 2) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Obtener valores de c y k ó A y B para que las funciones sean continuas en todos los reales

1) $f(x) = \begin{cases} x + 2c & x < -2 \\ 3cx + k & -2 \le x \le 1 \\ 3x - 2k & 1 < x \end{cases}$; 2) $g(x) = \begin{cases} 8(x-5)(x-7) - 4A & si \quad x < 6 \\ 4B + 4 & si \quad x = 6 \\ \dfrac{x^2}{5-x} & si \quad x > 6 \end{cases}$

Derivadas (definición, fórmulas, implícita, logarítmica)

1) Utiliza la definición de la derivada para calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 6$

   Encuentra la derivada de las funciones siguientes:

2) $y = \frac{senx}{1+cosx}$; $y = \sqrt[3]{(5x^2 - x + 4)^2}$
3) $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6$; $y = x^2sen(y)$
4) $y = (Senx)^{\ln(x)}$; $y = (Cosx)^{(3)^{2x-1}}$

Aplicaciones (recta tangente, razón de cambio)

1) Encuentre la ecuación de la recta tangente y normal de $y = 1.2\sqrt[3]{x^2} - \frac{0.8}{\sqrt{x}}$ en $(1,0.4)$
2) Encuentre la ecuación de la recta tangente y normal de $ye^x - x = y^2$ en $(0,0)$
3) **Crecimiento de la población.** Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad suburbana será $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ miles.
   (a) Obtenga una fórmula para encontrar la razón a la cual cambiará la población, con respecto al tiempo, dentro de t años.
   (b) ¿A qué razón crecerá la población dentro de 1 año?
   (c) ¿Cuánto crecerá realmente la población durante el segundo año?
   (d) ¿A qué razón crecerá la población dentro de 9 años?
   (e) ¿Qué sucederá con la razón de crecimiento de la población a largo plazo?
4) **Demanda de consumo.** Un importador de café brasileño estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p) = \frac{4374}{p^2}$ libras de café a la semana cuando el precio sea p dólares por libra. Se estima que dentro de t semanas, el precio del café brasileño será $p(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6$ dólares por libra. ¿A qué ritmo cambiará la demanda semanal de café con respecto al tiempo dentro de 10 semanas?; ¿aumentará o disminuirá la demanda?
5) **Crecimiento de la población.** De acuerdo con un modelo logístico basado en el supuesto de que la Tierra no puede soportar más de 40,000 millones de personas, la población mundial (en miles de millones) t años después de 1960 será aproximadamente $P(t) = \frac{40}{1+12e^{-0.08t}}$. Si este modelo es correcto, ¿a qué ritmo crecerá la población mundial con respecto al tiempo en 1995?
6) **Razón de cambio de las funciones de costo.** Supóngase que el costo total semanal, en dólares, de producción de x refrigeradores por la compañía Polaraire está dado por la función de costo total $C(x) = 8000 + 200x - 0.2x^2$ $(0 \leq x \leq 400)$ ¿Cuál es la razón de cambio del costo total con respecto de x cuando x=250?
7) Una escalera de 5 metros de largo está recargada en una pared de una casa. La escalera resbala alejándose de la casa a una tasa de $0.4\ m/seg$. Determine la tasa a la desciende la parte alta de la escalera cuando su parte inferior se encuentra a 3 metros de la pared
8) Dos barcos parten del mismo tiempo de un puerto, el barco A viaja hacia el norte a una velocidad de $15\ nudos/hora$ y el barco B hacia el oeste a una velocidad de $12\ nudos\ /hr$. Determina la tasa a la que se separan los dos barcos después de 2 horas.

Gráficas con derivada: Para las funciones siguientes encuentra

a) Dominio b) Intersecciones con el eje *x* y el eje *y* ; c) Puntos de discontinuidad y clasificación (justificando su respuesta calculando los límites), d) Asíntotas horizontales y verticales, e) Puntos críticos y clasificación, f) intervalos de crecimiento y decrecimiento, g) Concavidad y puntos de inflexión, h) Esbozo grafico de la función, i) rango

1) $y = x^4 - x^2$ 2) $y = 4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^8}$ 3) $y = \frac{2x^2}{9-x^2}$ 4) $y = xe^x$ 5) $y = x^2\ln(x)$

Extremos absolutos

1) Encuentra los extremos absolutos de $f(x)=x^3-3x^2-2$; $[-2,2]$

2) La empresa "Figuras Decorativas S. A" se dedica a realizar figuras de alambre para decoración y una de sus prioridades es optimizar el uso del material. El señor Gómez, encargado de hacer figuras geométricas de cuadrados y círculos tiene trozos de alambre de 1 metro de largo y necesita cortarlos en dos partes, con la primera parte la dobla para formar un cuadrado y el resto lo dobla para formar un círculo. El señor Gómez necesita determinar cómo debe cortarse el alambre de manera que la suma de las áreas de las figuras sea: a) Máxima y b)Mínima

Optimización

1) **Maximización de ingresos.** Suponga que la cantidad demandada semanalmente de cierto vestido se relaciona con el precio unitario p mediante la ecuación de demanda $p=\sqrt{800-x}$, donde *p* está en dólares y *x* se refiere a los unidades fabricados. ¿Cuántos vestidos deben fabricarse y venderse por semana para maximizar los ingresos? *Sugerencia:* $R(x)=px$
2) Un minorista de bicicletas motorizadas ha analizado los datos referentes a los costos, y determinó una función de costo que expresa el costo anual de comprar, poseer y mantener el inventario en función del tamaño (número de unidades) de cada pedido de bicicletas que coloca. He aquí la función de costo $c=f(q)=\frac{4860}{q}+15q+750\,000$ donde *C* es el costo anual del inventario, expresado en dólares, y *q* denota el número de bicicletas ordenadas cada vez que el minorista repone la oferta.
   a) Determine el tamaño de pedido que minimice el costo anual del inventario.
   b) ¿Cuál se espera que sea el costo mínimo anual del inventario?
3) La empresa donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de $500ft^3$. El tanque se fabricará soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que el tanque pese lo menos posible.
4) Se diseña un cartel rectangular cuya área de impresión es de $50in^2$, con márgenes superior e inferior de 4in, y márgenes laterales de 2in cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel que usará?

Respuestas:

Funciones (dominios)

1) $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)$ 2) $x\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

Rectas

1) $v=-800t+8000$; pendiente $=-800$ 2) $V(n)=-18n+200$; $V(6)=-18(6)+200=92$

Parábolas

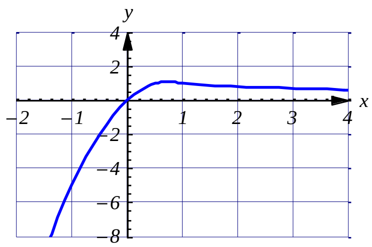
1) $q=250$; $r=125{,}000$. 2) $U(p)=\frac{1}{2}(p-200)(860-p)$; $p=530$; utilidad máxima 54, 450.00 pesos mensuales

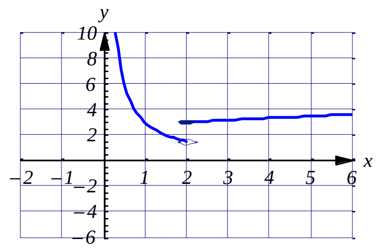
3) $I(x)=77.5x-0.5x^2$, el tamaño del grupo debes ser 77 ó 78 personas que producirán \$3003.
4) $P(x)=2(100-x)(x-50)$ Precio óptimo =US \$75

Gráficas (traslaciones y cambios de escala) (potencia, radical, exponencial, logarítmica, trigonométrica)

1)

Funciones seccionadas

1) 

2) 

3) $C(t) = \begin{cases} 375 + 0.5t & \text{si} \quad t \le 200 \\ 275 + t & \text{si} \quad t > 200 \end{cases}$, el tiempo máximo es 375 minutos.

Álgebra de funciones

1) R:$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{8+x}}{16-x^2}$; $D: x \in [-8,\infty) - \{-4,4\}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(16-x^2)\sqrt{8+x}}$; $D: x \in (-8,\infty) - \{-4,4\}$

2) R:$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{10+x}}{x^2-4}$; $D: x \in [-10,\infty) - \{-2,2\}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(x^2-4)\sqrt{10+x}}$; $D: x \in (-10,\infty) — 2,2$

Composición de funciones

1) $f(g(x) = \frac{1}{8-x}$; $D: x \in [-8,\infty) - \{8\}$; 2) $f(g(x) = \frac{1}{6+x}$; $D: x \in [-10,\infty) - \{6\}$

Ecuaciones exponenciales, logarítmicas

1) $p = \frac{log(80-q)}{log\ 2}; 4.32$ 2) $x = \frac{11}{3}$ 3) $x = 3$ 4) - 8.0472 5) - 4.9041

Aplicaciones de exponenciales, logarítmicas, trigonométricas (monto interés compuesto)

1) a) 9.12 segundos b) 20.27 segundos 2) **a)** 60 palabras / minuto b) 107 palabras / minuto c) 136 palabras / minuto
3) 1080 4) $f(t) = 2500Cos(t) + 2500$

Función inversa

1) $f^{-1}(x) = \frac{4x-1}{2x-3}$; $D_f = x \in \mathbb{R} - \{2\}$; $R_f = x \in \mathbb{R} - \{3/2\}$; $D_{f^{-1}} = x \in \mathbb{R} - \{3/2\}$; $R_{f^{-1}} = x \in \mathbb{R} - \{2\}$

2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{(ln3)} ln\left(\frac{5x-2}{1-x}\right)$

Límites

1) $1/8$ 2) 5/2 3) 0 4) $32/3$ 5) 1/3

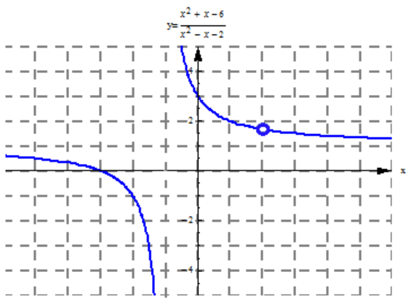
Dada la Grafica obtener límites, asíntotas

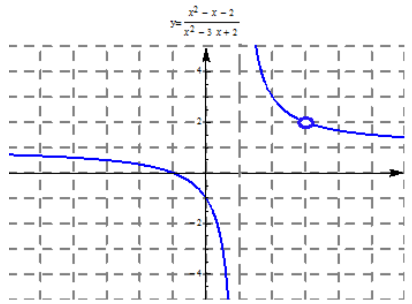
1)

Continuidad (3 tipos)

1) Esencial de salto; 2) eliminable 3) esencial infinita

Gráficas de funciones racionales

1) 

, 2) 

Obtener valores de c y k, A y B

1) $C=\frac{1}{3}$; $k=\frac{2}{3}$; 2) $A=7$; $B=10$

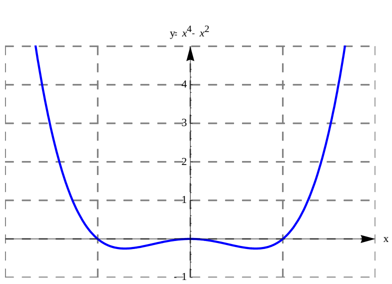
Derivadas (definición, fórmulas, implícita, logarítmica)

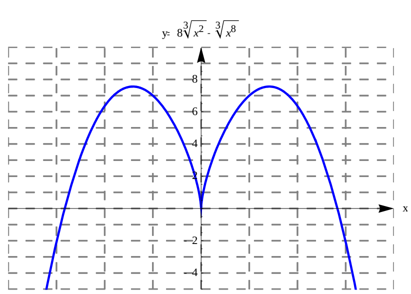
1) $1/6$
2) $y'=\frac{1}{1+cosx}$; $y=\frac{10x-1}{3\left(\sqrt[3]{(5x^2-x+4)^2}\right)}$
3) $\frac{dy}{dx}=\frac{5-3x^2+2xy-4y^3}{12xy^2-x^2}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{2xSen(y)}{1-x^2Cos(y)}$
4) $\frac{dy}{dx}=(Senx)^{\ln(x)}\left[lnx\left(\frac{Cos\,x}{Senx}\right)+\frac{1}{x}\ln(Senx)\right]$; $\frac{dy}{dx}=(Cosx)^{(3)^{2x-1}}\left[-\frac{3^{2x-1}Sen\,x}{Cos\,x}-3^{2x-1}(ln3)(2)\ln(Cosx)\right]$

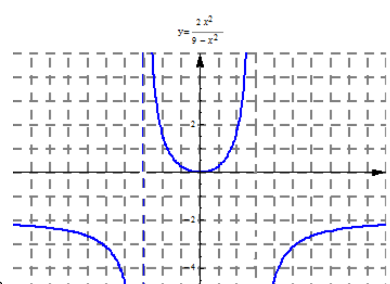
Aplicaciones (recta tangente, razón de cambio)

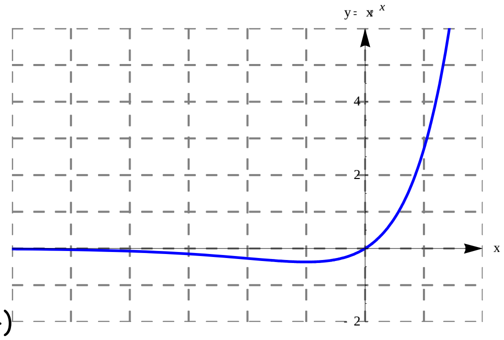
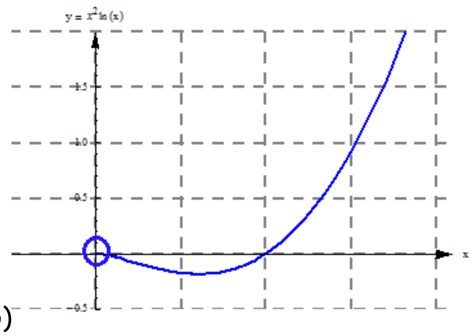
1) Ec. de la tangente $y=1.2x-0.8$ Ec de la normal $y=-1.2x+1.6$
2) Ec. de la tangente $y=x$ Ec de la normal $y=-x$
3) a) $P'(t)=\frac{6}{(t+1)^2}$ miles por año b) 1500 por año c) 1000 d) 60 por año e) La tasa de crecimiento se aproxima a cero
4) Disminuyendo a la razón de 6 libras por semana
5) 708.5 millones por año
6) $C'(250)=200-0.4(250)=100$
7) $-3m/seg$
8) $19.2\ nudos/hr$

Graficas con derivada

1) 

2) 

3) 

4)  5) 

Extremos absolutos;

1) Valor máximo absoluto $f(0) = -2$, valor mínimo absoluto $f(-2) = -22$

2) El valor mínimo absoluto es $f\left(\frac{4}{4+\pi}\right) \approx 0.0350062$ y el valor máximo absoluto es $f(0) = \frac{0^2}{16} + \frac{(1-0)^2}{4\pi} = 0.075775$. Por lo cual para que el área sea mínima el alambre debe cortarse en $x = \frac{4}{4+\pi}$ m y para que el área sea máxima el alambre no debe cortarse y con él debe construirse solamente el círculo cuyo radio debe medir $r = \frac{1}{2\pi}$ m

Optimización

1) 533 2) a) $q = 18$; b) $f(18) = \frac{4860}{18} + 15(18) + 750000 = \$750\,540$ 3) 10 ft en los lados de la base y 5 ft de profundidad 4) $9 \times 18\ pulgadas$