

Extremos absolutos y relativos

Teorema sobre la localización de extremos absolutos: Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces sus extremos absolutos ocurren en puntos críticos del intervalo, es decir, en $x = a$ ó en $x = b$ ó en puntos críticos estacionarios ó en puntos críticos singulares.

Guía para obtener los extremos absolutos de una función $f(x)$ continua en $[a, b]$:

1. Encuentra los puntos críticos de la función en $[a, b]$ y calcula los valores de $f(x)$ en ellos.
2. El mayor de los valores obtenidos en el paso anterior es el valor máximo absoluto y el menor de los valores encontrados es el valor mínimo absoluto.

Extremos absolutos:

Determine los extremos absolutos de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[-2, 3]$
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ en $[-3, 2]$
3. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$ en $[-1, 2]$

Problemas de Extremos:

4. **Fuerza de Trabajo Femenil Independiente.** Los datos muestran que el número de mujeres no agricultoras que trabajan por su cuenta de tiempo completo es aproximadamente $N(t) = 0.81t - 1.14\sqrt{t} + 1.53$ ($0 \leq t \leq 6$) donde $N(t)$ se mide en millones y t se mide en intervalos de 5 años, donde $t = 0$ corresponde al inicio de 1963. Determine los extremos absolutos de la función N en el intervalo $[0, 6]$ e interprete sus resultados.
5. **Tiempo óptimo de venta.** El valor presente de una propiedad adquirida por un inversionista está dado por la función $P(t) = 80\,000e^{(\sqrt{t}/2) - 0.09t}$ ($0 \leq t \leq 8$) donde $P(t)$ se mide en dólares y t es el tiempo en años desde el presente. Determine el tiempo óptimo (con base en el valor presente) para que el inversionista venda la propiedad. ¿Cuál es el valor presente óptimo de la propiedad?

Optimización

Guía para la solución de problemas de optimización:

1. **Lee cuidadosamente el problema:** si es necesario debes leerlo varias veces hasta que lo entiendas. Para la comprensión del problema es conveniente que te hagas las siguientes preguntas: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son las cantidades dadas?, ¿cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuja un diagrama:** en ocasiones es útil dibujar un diagrama que permita identificar los datos y las incógnitas.
3. **Introduce notación:** asigna un nombre a la función que se va maximizar o minimizar, además asigna variables a las otras cantidades desconocidas y marca en el diagrama estas cantidades (te puede ayudar usar iniciales con símbolos sugerentes; por ejemplo V para el volumen, C para el costo, etc.)
4. **Identifica la función** que buscas maximizar o minimizar y relacionala con los términos de los símbolos del paso anterior.
5. **Expresa la función en términos de una sola variable:** si en el paso anterior la función quedó expresada en términos de varias variables, utiliza la información dada para hallar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables, luego utiliza estas relaciones para eliminar todas las variables, excepto una. Escribe el dominio implícito de la función.
6. **Encuentra el extremo de la función:** aplica los métodos vistos en el parcial pasado para hallar el valor máximo o el valor mínimo de f .

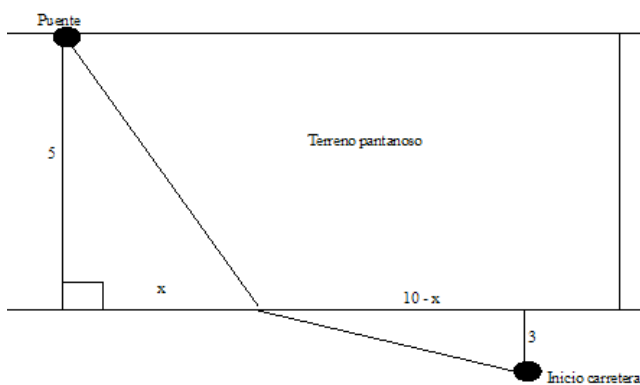
Problemas de Optimización:

6. **Maximización de ganancias.** La gerencia de Trappee and Sons, Inc., productores de la famosa salsa picante TexaPep, estiman que sus ganancias por la producción y venta diaria de x cajas (cada caja contiene 24 botellas) de la salsa picante están dadas por $P(x) = -0.000002x^3 + 6x - 400$ dólares. ¿Cuál es la máxima ganancia posible de Trappee en un día?
7. **Minimización de Costos de Producción.** El costo total mensual, en dólares, por la fabricación de x unidades de la cámara modelo MI en la corporación de instrumentos de precisión Cannon está dado por la función $C(x) = 0.0025x^2 + 80x + 10\,000$
 - a. Dé la función de costo promedio \bar{c} .
 - b. Proporcione el nivel de producción que arroje el menor costo promedio de producción.
 - c. Encuentre el nivel de producción en que el costo promedio es igual al costo marginal.

d. Compare el resultado de la parte C con el de la parte B.

8. Publicidad: El Licenciado Carlos Montes, jefe de la oficina de personal de la empresa "Duro de México S.A. de C.V." desea poner un anuncio en un periódico solicitando personal. El Lic. Montes sabe que el periódico en el cual quiere publicar el anuncio cobra de acuerdo a la superficie total del anuncio y que todo anuncio requiere de márgenes de 2 cm. en cada lado que también se pagan. El Lic. Montes desea poner un anuncio de $10\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ y necesita determinar las dimensiones de la parte impresa que sea lo más grande posible. Analiza la situación y proporciona una respuesta.

9 Carreteras. El gobierno del Estado de Veracruz quiere construir un nuevo tramo de autopista para conectar un puente con el inicio de una carretera localizada 10 kilómetros al este y 8 kilómetros al sur del puente. La carretera debe cruzar un terreno pantanoso de 5 kilómetros, sin embargo, la tecnología actual permite conseguir el mismo costo para todo el tramo de autopista que se va a construir. Determina qué tan alejada al este del puente debe tenderse la autopista (ver figura 10) a fin de conseguir el menor costo de construcción.



10. Electricidad: La Comisión Federal de Electricidad quiere suministrar energía eléctrica al ingenio azucarero "San Martín" situado en la riberia del Río "San Juan" desde una planta que se encuentra a 3 kilómetros en el extremo opuesto del río.



Figura 10

El río mide 1.414 kilómetros de ancho (ver figura 11) y se debe considerar que tender cable por debajo del río cuesta 3 veces más que por tierra (costo por kilómetro instalado).

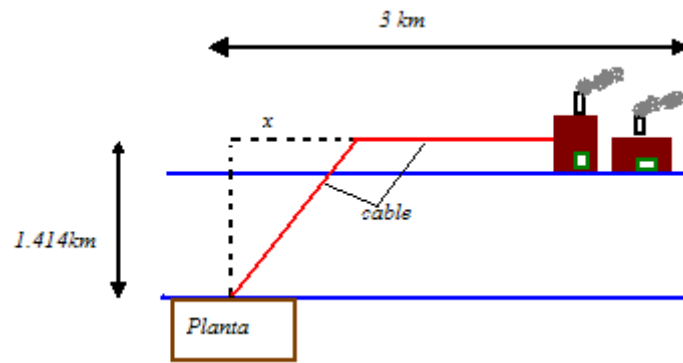


Figura 11

Respuestas

1. Valor máximo absoluto: 5; valor mínimo absoluto: -4
2. Valor máximo absoluto: 19; valor mínimo absoluto: -1
3. Valor máximo absoluto: 0; valor mínimo absoluto: -3
4. $f(6) = 3.60$, $f(0.5) = 1.13$; el número de mujeres no agricultoras que trabajan por su cuenta de tiempo completo en el intervalo de tiempo desde 1963 a 1993 alcanzó su nivel más alto, 3.6 millones, en 1993.
5. $t = 7.72$ por año; \$160 208
6. \$3600
7. a) $0.0025x + 80 + \frac{10000}{x}$
 b) 2000
 c) 2000
 d) Lo mismo
8. Dimensiones 20cmx20cm
9. La autopista debe estar a 6.25m al este del puente cuando cruce el terreno pantanoso
10. Para que el costo de instalación sea mínimo, el punto de llegada del cable debe ser $x = 0.5 \text{ km}$